

Devoir Maison

Pour le 8 janvier 2024

Problème*(adapté de Ecricome ECS 2018)*

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Partie I — Variables vérifiant une relation de Panjer

On dit qu'une variable aléatoire N , à valeurs dans \mathbb{N} vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$\mathbb{P}(N = 0) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(N = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}(N = k - 1).$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$, et que b est un réel strictement positif.

a) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N = k) = \frac{b^k}{k!} \mathbb{P}(N = 0).$$

b) Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b .
Préciser son espérance et sa variance.

2. On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.

a) Montrer que :

$$\forall k \geq 2, \quad \mathbb{P}(N = k) = 0.$$

b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a .

3. On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$.

a) Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Z = k) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}(Z = k-1).$$

b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes, en fonction de n et p .

4. On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans \mathbb{N} , vérifiant la relation de Panjer.

a) Calculer $\mathbb{P}(N = 1)$. En déduire que $a + b \geq 0$.

b) Montrer que pour tout entier $m \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^m k \mathbb{P}(N = k) = a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) \mathbb{P}(N = k) + b \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(N = k).$$

c) En déduire que $\left((1-a) \sum_{k=1}^m k \mathbb{P}(N = k) \right)_{m \geq 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance.

Préciser alors la valeur de $\mathbb{E}(N)$ en fonction de a et b .

d) Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et que :

$$\mathbb{E}(N^2) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}.$$

e) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $\mathbb{V}(N)$ en fonction de a et b .

f) Montrer que $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$ si, et seulement si, N suit une loi de Poisson.

Partie II — Fonction génératrice

On notera dans la suite :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}(N = k),$$

où N est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} .

On suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et que $\frac{b}{a} > 0$. On note $\alpha = \frac{-(a+b)}{a}$ et G la série génératrice de N

5. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière G

6. On considère la série entière $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} p_{k-1} x^k$ et H sa fonction somme.

(a) Justifier que G et H ont même rayon

(b) Pour $x \in]-R, R[$ déterminer $H'(x)$

7. (a) Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$

$$G(x) = p_0 + axG(x) + bH(x)$$

(b) En déduire une équation différentielle linéaire vérifiée par G .

(c) Déterminer une expression explicite de G sur $] -R, R[$.

8. En utilisant G et ses dérivées, retrouver les expressions de $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{V}(N)$ obtenues dans la partie I.

Corrigé

Corrigé de l'exercice

Partie I — Variables vérifiant une relation de Panjer

1. (a) On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(N = k) = \frac{b}{k} \mathbb{P}(N = k - 1)$.

Montrons alors par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(k) : \ll \mathbb{P}(N = k) = \frac{b^k}{k!} \mathbb{P}(N = 0) \gg$ est vraie.

Initialisation :

$$\mathbb{P}(N = 0) = \frac{b^0}{0!} \mathbb{P}(N = 0), \text{ donc } \mathcal{P}(0) \text{ est vraie.}$$

Hérédité :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie.

$$\mathbb{P}(N = k + 1) = \frac{b}{k + 1} \mathbb{P}(N = k) = \frac{b}{k} + 1 \frac{b^k}{k!} \mathbb{P}(N = 0) = \frac{b^{k+1}}{(k + 1)!} \mathbb{P}(N = 0)$$

Ce qui prouve la propriété au rang $k + 1$ et achève la récurrence.

- (b) La série de terme général $\frac{b^k}{k!} \mathbb{P}(N = 0)$ est une série exponentielle (multipliée par une constante). On en déduit qu'elle converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} \mathbb{P}(N = 0) = \mathbb{P}(N = 0) e^b$$

Or, la série de terme général $\frac{b^k}{k!} \mathbb{P}(N = 0)$ coïncide avec la série de terme général $\mathbb{P}(N = k)$. Sa somme vaut donc aussi 1, car la famille $([N = k])_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. On en déduit que $\mathbb{P}(N = 0) = e^{-b}$. Dès lors, $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(N = k) = e^{-b} \frac{b^k}{k!}$$

La variable aléatoire N suit donc une loi de Poisson de paramètre b . Par conséquent, elle admet une espérance et une variance avec $\mathbb{E}(N) = b$ et $\mathbb{V}(N) = b$.

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout $k \geq 2$, $\mathbb{P}(N = k) = 0$.

Initialisation :

$$\mathbb{P}(N = 2) = \left(a + \frac{b}{2}\right) \mathbb{P}(N = 1) = (a - a) \mathbb{P}(N = 1) = 0.$$

Hérédité :

Soit $k \geq 3$. Supposons que $\mathbb{P}(N = k - 1) = 0$. Montrons que $\mathbb{P}(N = k) = 0$.

$$\mathbb{P}(N = k) = \left(a - \frac{2a}{k}\right) \mathbb{P}(N = k - 1) = 0$$

Ce qui prouve la propriété au rang k et achève la récurrence.

- (b) On déduit de la question précédente que $N(\Omega) = \{0, 1\}$. Par conséquent, N suit une loi de Bernoulli. De plus, $\mathbb{P}(N = 1) + \mathbb{P}(N = 0) = 1$.

D'où, $-a \mathbb{P}(N = 0) + \mathbb{P}(N = 0) = 1$ et comme $a < 1$, $\mathbb{P}(N = 0) = \frac{1}{1 - a}$. Par conséquent, N suit une loi de Bernoulli de paramètre $-\frac{a}{1 - a}$.

3. (a) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $\mathbb{P}(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k}$.

Or $\binom{n}{k} = \frac{n+1-k}{k} \binom{n}{k-1}$. D'où

$$\mathbb{P}(Z = k) = \frac{n+1-k}{k} \times \frac{p}{1-p} \binom{n}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n+1-k} = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}(Z = k-1)$$

- (b) On sait déjà, comme $n \in \mathbb{N}^*$, que $\mathbb{P}(Z = 0) \neq 1$. De plus, avec la relation précédente, en posant $a = -\frac{p}{1-p}$ et $b = \frac{p(n+1)}{1-p}$, on a bien $a < 1$ car $-p < 1-p$ et $1-p > 0$ et

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \mathbb{P}(N = k) = \left(a + \frac{b}{k} \right) \mathbb{P}(N = k-1)$$

Enfin, $a + \frac{b}{n+1} = 0$. La relation précédente reste donc vraie pour $k = n+1$ et, par une récurrence immédiate du même type que celle effectuée à la question 2.(a), elle reste vraie pour $k \geq n+1$ car tous les termes sont nuls. On a donc bien

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(N = k) = \left(a + \frac{b}{k} \right) \mathbb{P}(N = k-1)$$

La variable aléatoire Z vérifie donc une relation de Panjer.

4. (a) On a $\mathbb{P}(N = 1) = (a + b)\mathbb{P}(N = 0)$.

Supposons par l'absurde que $\mathbb{P}(N = 0) = 0$. Alors, une récurrence immédiate du type de celle de la question 2.(a) montre alors que pour tout $k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(N = k) = 0$, ce qui est absurde car $N(\Omega) = \mathbb{N}$.

On en déduit que $\mathbb{P}(N = 0) > 0$. Or $\mathbb{P}(N = 1) \geq 0$ d'où $a + b \geq 0$.

- (b) Soit $m \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m k\mathbb{P}(N = k) &= a \sum_{k=1}^m k\mathbb{P}(N = k-1) + b \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(N = k-1) \\ &= a \sum_{j=0}^{m-1} (j+1)\mathbb{P}(N = j) + b \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{P}(N = j) \end{aligned}$$

en faisant les changements de variables $j = k-1$ dans les deux sommes.

- (c) Avec le résultat de la question précédente, on a donc pour tout $m \geq 1$

$$(1-a) \sum_{k=1}^{m-1} k\mathbb{P}(N = k) + m\mathbb{P}(N = m) = (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(N = k)$$

D'où pour tout $m \geq 2$,

$$(1-a) \sum_{k=1}^m k\mathbb{P}(N = k) + (m+1)\mathbb{P}(N = m+1) = (a+b) \sum_{k=0}^m \mathbb{P}(N = k) \quad (\star)$$

Or, $1-a > 0$, $a+b \geq 0$, $(m+1)\mathbb{P}(N = m+1) \geq 0$ et $\sum_{k=0}^m \mathbb{P}(N = k) \leq 1$.

Dès lors,

$$(1-a) \sum_{k=1}^m k\mathbb{P}(N = k) \leq a+b \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^m k\mathbb{P}(N = k) \leq \frac{a+b}{1-a}$$

La suite $\left((1-a) \sum_{k=1}^m k\mathbb{P}(N = k) \right)_{m \geq 1}$ est ainsi majorée par $a+b$.

De plus, la suite $\left(\sum_{k=1}^m k\mathbb{P}(N = k) \right)_{m \geq 1}$ est croissante majorée par $\frac{a+b}{1-a}$, elle converge donc vers un réel $\ell \leq$

$$\frac{a+b}{1-a}$$

La variable aléatoire N admet une espérance si et seulement si la série de terme général $k\mathbb{P}(N = k)$ est absolument convergente ce qui équivaut ici à sa convergence car la variable aléatoire N est à valeurs dans \mathbb{N} .

On en déduit donc que N admet une espérance.

Par conséquent, $(m + 1)\mathbb{P}(N = m + 1)$ est le terme général d'une série convergente, d'où $\lim_{m \rightarrow +\infty} (m + 1)\mathbb{P}(N =$

$m + 1) = 0$. Comme $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k) = 1$, en faisant tendre m vers $+\infty$ dans la relation (\star) , on en déduit que

$$(1 - a)\mathbb{E}(N) = a + b, \text{ d'où } \mathbb{E}(N) = \frac{a + b}{1 - a}$$

(d) On raisonne avec des calculs similaires à ceux menés dans la question 4.

On a alors pour tout $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m k^2 \mathbb{P}(N = k) &= a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)^2 \mathbb{P}(N = k) + b \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) \mathbb{P}(N = k) \\ &= a \sum_{k=0}^{m-1} k^2 \mathbb{P}(N = k) + (2a + b) \sum_{k=0}^{m-1} k \mathbb{P}(N = k) + (a + b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(N = k) \end{aligned}$$

D'où

$$(1 - a) \sum_{k=1}^{m-1} k^2 \mathbb{P}(N = k) + m^2 \mathbb{P}(N = m) = (2a + b) \sum_{k=0}^{m-1} k \mathbb{P}(N = k) + (a + b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(N = k) \quad (\star)$$

On a déjà montré que $a + b \geq 0$. Il reste à montrer que $2a + b \geq 0$.

On a $2\mathbb{P}(N = 2) = (2a + b)\mathbb{P}(N = 1)$. Si $\mathbb{P}(N = 1) = 0$, alors par une récurrence immédiate, on montre que pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{P}(N = k) = 0$ d'où $\mathbb{P}(N = 0) = 1$, ce qui est exclu.

On a donc $\mathbb{P}(N = 1) > 0$ et en fait même $a + b > 0$. Comme $\mathbb{P}(N = 2) \geq 0$, on en déduit que $2a + b \geq 0$. Dès lors, pour tout $m \geq 2$, en appliquant la dernière égalité au rang $m + 1$, il vient, comme $(m + 1)^2 \mathbb{P}(N = m + 1) \geq 0$,

$$(1 - a) \sum_{k=1}^m k^2 \mathbb{P}(N = k) \leq (2a + b)\mathbb{E}(N) + (a + b)$$

car $\sum_{k=0}^m k \mathbb{P}(N = k) \leq \mathbb{E}(N)$ et $\sum_{k=0}^m \mathbb{P}(N = k) \leq 1$.

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^m k^2 \mathbb{P}(N = k) \leq \frac{2a + b}{1 - a} \mathbb{E}(N) + \frac{a + b}{1 - a}$$

La suite $\left(\sum_{k=1}^m k^2 \mathbb{P}(N = k) \right)_{m \geq 1}$ est croissante majorée, elle converge donc. La série de terme général $k^2 \mathbb{P}(N = k)$

est donc absolument convergente car convergente et à termes positifs et N admet ainsi un moment d'ordre 2.

De plus, $(m + 1)^2 \mathbb{P}(N = m + 1) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$. En faisant tendre m vers $+\infty$ dans l'égalité (\star) , on obtient

$$\mathbb{E}(N^2) = \frac{2a + b}{1 - a} \mathbb{E}(N) + \frac{a + b}{1 - a} = \frac{(a + b)}{(1 - a)^2} (2a + b + 1 - a) = \frac{(a + b)(a + b + 1)}{(1 - a)^2}$$

(e) La variable aléatoire N admet un moment d'ordre 2 donc une variance. Avec la formule de Koenig-Huygens, il vient

$$\mathbb{V}(N) = \mathbb{E}(N^2) - (\mathbb{E}(N))^2 = \frac{(a + b)(a + b + 1 - a - b)}{(1 - a)^2} = \frac{a + b}{(1 - a)^2}$$

(f) On sait déjà que, si N suit une loi de Poisson, alors $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$.

Réciproquement, supposons que $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$. Avec les résultats des question 4.(c) et 4.(d), on a alors

$$\frac{(a + b)}{(1 - a)^2} (1 - (1 - a)) = 0 \text{ si et seulement si } a = 0 \text{ ou } a + b = 0$$

Si $a + b = 0$, alors $\mathbb{P}(N = 1) = 0$ et, par une récurrence immédiate, on en déduit que $\mathbb{P}(N = k) = 0$ pour tout $k \geq 1$. D'où $\mathbb{P}(N = 0) = 1$ ce qui est exclu.

Ainsi $a + b \neq 0$ d'où $a = 0$. D'après la question 1.(b), on en déduit que N suit une loi de Poisson de paramètre b .

On a donc bien l'équivalence voulue.

Partie II — Fonction génératrice

5. Pour $k \in \mathbb{N}$ on a $p_k \mathbb{P}(N = k) \neq 0$ car $a > 0$ et $b > 0$.

De plus

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = a + \frac{b}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} a$$

Ainsi, d'après le critère de D'Alembert, G est de rayon de convergence $\frac{1}{a}$.

6. (a) On peut simplement appliquer de nouveau le critère de D'Alembert ou bien remarquer que H s'obtient à partir de G par primitivation terme à terme et donc que, d'après le cours, elles ont même rayon de convergence.

(b) Pour $x \in]-R, R[$ on a, par dérivation terme à terme,

$$H'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} p_{k-1} k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} p_{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k = G(x)$$

7. (a) Soit $x \in]-R, R[$ alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k \\ &= p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} p_k x^k \\ &= p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a + \frac{b}{k} \right) p_{k-1} x^k \\ &= p_0 + a \sum_{k=1}^{+\infty} p_{k-1} x^k + b \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} p_{k-1} x^k \quad \text{toutes ces séries convergent} \\ &= p_0 + ax \sum_{k=1}^{+\infty} p_{k-1} x^{k-1} + bH(x) \\ &= p_0 + axG(x) + bH(x) \end{aligned}$$

(b) En dérivant la relation précédente on a

$$\forall x \in]-R, R[, \quad G'(x) = axG'(x) + aG(x) + bG(x)$$

G est donc solution sur $] -R, R[$ de l'équation différentielle $y' - \frac{a+b}{1-ax}y = 0$ (sur $] -R, R[$ on a $1-ax > 0$ et donc la division est licite)

(c) Il nous suffit de résoudre l'équation différentielle.

La fonction $x \mapsto -\frac{a+b}{1-ax}$ se primitive sur $] -R, R[$ en $x \mapsto \frac{a+b}{a} \ln(1-ax)$.

Il existe alors $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]-R, R[, \quad G(x) = K \exp\left(-\frac{(a+b)}{a} \ln(1-ax)\right) = K(1-ax)^\alpha$$

Or, comme G est la série génératrice d'une variable aléatoire on a nécessairement $G(1) = 1$, i.e. $K(1-a)^\alpha = 1$ et donc

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{a}, \frac{1}{a} \right[, \quad G(x) = \left(\frac{1-ax}{1-a} \right)^\alpha$$

8. Comme $1 < \frac{1}{a}$, G est donc de classe \mathcal{C}^∞ en 1. Ainsi N admet des moments à tout ordre et donc en particulier une espérance et une variance.

On a alors

$$\mathbb{E}(N) = G'(1) = \frac{-a}{1-a} \alpha = \frac{a+b}{1-a}$$

et

$$\mathbb{V}(N) = \mathbb{E}(N(N-1)) + \mathbb{E}(N) - \mathbb{E}(N)^2 = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2 = \frac{a^2}{(1-a)^2} \alpha(\alpha-1) + \frac{a+b}{1-a} - \frac{(a+b)^2}{(1-a)^2} = \frac{a+b}{(1-a)^2}$$

On retrouve bien les expressions de $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{V}(N)$ obtenues dans la première partie.